

DRŽAVNA MATURA 2026.

# MATEMATIKA

# A

---

Detaljna rješenja prvoga roka

Školska godina 2025./2026.

1.

Koja je od navedenih tvrdnji istinita?

- A. Razlika dvaju prirodnih brojeva uvijek je prirodni broj.
- B. Količnik dvaju pozitivnih cijelih brojeva uvijek je cijeli broj.
- C. Zbroj dvaju pozitivnih racionalnih brojeva uvijek je racionalni broj.
- D. Umnožak dvaju pozitivnih iracionalnih brojeva uvijek je iracionalni broj.

### Rješenje

Tvrdnje A, B i D pobijamo protuprimjerima:

$$3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}, \quad 1 : 2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

Za racionalne brojeve  $r = \frac{a}{b}$  i  $s = \frac{c}{d}$  vrijedi

$$r + s = \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q},$$

pa je tvrdnja C istinita.

**Odgovor:** C.

2.

Kompleksnomu broju

$$z = \frac{a + 2i}{1 + i}$$

pridružena je točka u Gaussovoj (kompleksnoj) ravnini. Za koji realni broj  $a$  ta točka pripada realnoj osi?

- A. -2
- B. 0
- C. 1
- D. 2

### Rješenje

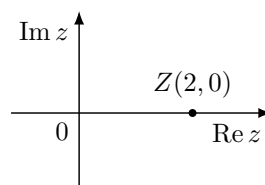
Razlomak proširimo konjugirano kompleksnim brojem  $1 - i$ :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(a + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\ &= \frac{a + 2 + (2 - a)i}{2} = \frac{a + 2}{2} + \frac{2 - a}{2}i. \end{aligned}$$

Točka pripada realnoj osi ako je imaginarni dio jednak nuli:

$$\frac{2 - a}{2} = 0 \implies a = 2.$$

Tada je  $z = 2$ , pa je pripadna točka  $Z(2, 0)$ .



**Odgovor:** D.  $a = 2$ .

3.

Kojim se izrazom može skratiti razlomak

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^3 - 2x}$$

za sve  $x$  za koje je razlomak definiran?

- A.  $2x$       B.  $x^2$       C.  $x - 1$       D.  $x + 1$

**Rješenje**

U KNJIŽICI FORMULA

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Rastavimo brojnik i nazivnik:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^3 - 2x} = \frac{(x - 1)^2}{2x(x^2 - 1)} = \frac{(x - 1)^2}{2x(x - 1)(x + 1)}.$$

Zajednički je faktor brojniku i nazivniku  $x - 1$ .

**Odgovor:** C.  $x - 1$ .

4.

Koliko vode treba dodati u jednu litru 90 %-tnoga voćnog soka kako bismo dobili 50 %-tni voćni sok?

- A. 0.4 litre      B. 0.5 litara      C. 0.6 litara      D. 0.8 litara

**Rješenje**

U jednoj litri soka nalazi se 0.9 litara voćnoga sadržaja. Ako dodamo  $x$  litara vode, ukupni je volumen  $1 + x$ , a količina voćnoga sadržaja ostaje 0.9 litara. Zato vrijedi

$$\frac{0.9}{1 + x} = 0.5.$$

Slijedi

$$0.9 = 0.5 + 0.5x \implies x = 0.8.$$

**Odgovor:** D. Treba dodati 0.8 litara vode.

5.

Za koji je realni broj  $a$  umnožak rješenja jednadžbe

$$3x^2 + 2ax - 5a = 0$$

jednak 20?

- A.  $-30$       B.  $-12$       C.  $12$       D.  $30$

**Rješenje**

U KNJIŽICI FORMULA

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

za kvadratnu jednadžbu  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ .U zadanoj su jednadžbi vodeći koeficijent 3, a slobodni član  $-5a$ . Stoga

$$x_1 x_2 = \frac{-5a}{3}.$$

Prema uvjetu zadatka

$$\frac{-5a}{3} = 20 \implies a = -12.$$

**Odgovor:** B.  $a = -12$ .**6.**

Ako je

$$\log_5 12.5 = n - \log_5 10,$$

koliko iznosi  $5^{2-n}$ ?

A.  $\frac{1}{125}$

B.  $\frac{1}{5}$

C. 5

D. 125

**Rješenje**

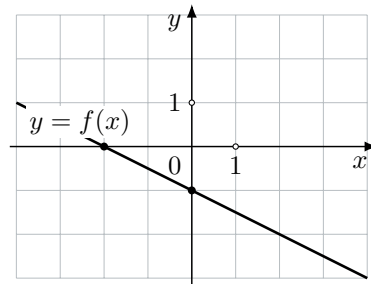
Iz zadane jednakosti slijedi

$$n = \log_5 12.5 + \log_5 10.$$

**Kalkulator:** Unesemo  $5^{2-(\log_5 12.5 + \log_5 10)}$  i dobijemo  $0.2 = \frac{1}{5}$ .**Odgovor:** B.  $\frac{1}{5}$ .

7.

Na slici je prikazan graf linearne funkcije  $f(x) = ax + b$ .



Što vrijedi za realne brojeve  $a$  i  $b$ ?

A.  $a = -\frac{1}{2}, b = -1$

B.  $a = -1, b = -\frac{1}{2}$

C.  $a = -1, b = -2$

D.  $a = -2, b = -1$

### Rješenje

Graf prolazi točkama  $(-2, 0)$  i  $(0, -1)$ . Sjecište s osi  $y$  odmah daje  $b = -1$ .

#### U KNJIŽICI FORMULA

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Koeficijent smjera iznosi

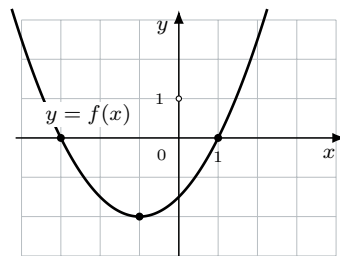
$$a = \frac{-1 - 0}{0 - (-2)} = -\frac{1}{2}.$$

**Odgovor:** A.  $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ .

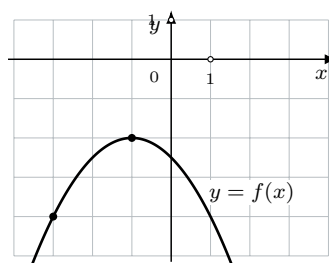
8.

Na kojoj je slici prikazan graf kvadratne funkcije

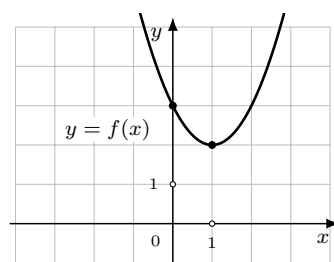
$$f(x) = 0.5(x + 1)^2 - 2?$$



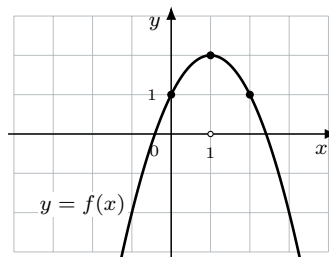
A.



B.



C.



D.

### Rješenje

Funkcija je već zapisana u tjemnom obliku

$$f(x) = a(x - x_T)^2 + y_T.$$

Iz  $f(x) = 0.5(x + 1)^2 - 2$  odmah očitavamo  $a = 0.5 > 0$  i tjeme

$$T(-1, -2).$$

Parabola je zato otvorena prema gore. Nultočke su

$$0.5(x + 1)^2 - 2 = 0 \iff (x + 1)^2 = 4 \iff x = -3 \text{ ili } x = 1.$$

Jedino slika A ima tjeme  $T(-1, -2)$ , otvara se prema gore i siječe os  $x$  u  $-3$  i  $1$ .

**Odgovor: A.**

9.

Zadana je funkcija  $f(x) = 5^x - 1$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Koji od navedenih brojeva **ne pripada** domeni (prirodnomu području definicije) njoj inverzne funkcije  $f^{-1}$ ?

A.  $-1$     B.  $0$     C.  $1$     D.  $2$

### Rješenje

Domena inverzne funkcije jednaka je skupu vrijednosti izvorne funkcije. Budući da je  $5^x > 0$  za

svaki  $x \in \mathbb{R}$ , vrijedi

$$5^x - 1 > -1.$$

Zato je

$$D_{f^{-1}} = \langle -1, +\infty \rangle.$$

Broj  $-1$  ne pripada toj domeni.

**Odgovor:** A.  $-1$ .

10.

Koja je od navedenih funkcija rastuća na cijeloj domeni (prirodnomu području definicije)?

A.  $f(x) = \frac{1}{x}$     B.  $f(x) = x$     C.  $f(x) = x^2$     D.  $f(x) = \sin x$

**Rješenje**

Funkcija  $f(x) = x$  strogo je rastuća na cijeloj domeni  $\mathbb{R}$ . Funkcija  $1/x$  pada na svakom intervalu svoje domene,  $x^2$  pada za  $x < 0$  i raste za  $x > 0$ , a  $\sin x$  izmjenjuje intervale rasta i pada.

**Odgovor:** B.  $f(x) = x$ .

11.

Peti član aritmetičkoga niza iznosi 7, a jedanaesti 115. Koliko iznosi osmi član toga niza?

A. 79    B. 61    C. 54    D. 43

**Rješenje**

U KNJIŽICI FORMULA

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Vrijedi

$$a_{11} - a_5 = 6d = 115 - 7 = 108,$$

pa je  $d = 18$ . Od petoga do osmoga člana tri su koraka, stoga

$$a_8 = a_5 + 3d = 7 + 3 \cdot 18 = 61.$$

**Odgovor:** B. 61.

12.

Duljina prijedenoga puta  $S$ , izražena u metrima, za prvih deset sekundi biciklističke utrke može se izraziti formulom

$$S(t) = 1.15t^2 + t,$$

pri čemu je  $t$  vrijeme, izraženo u sekundama, proteklo od početka utrke. Koliko iznosi trenutna brzina biciklista šest sekundi nakon početka utrke?

A. 7.07 m/s

B. 7.4 m/s

C. 14.14 m/s

D. 14.8 m/s

**Rješenje**

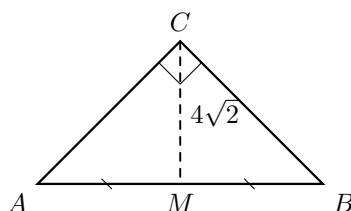
Trenutna je brzina derivacija prijedenoga puta. Na kalkulatoru odaberemo predložak za numeričku derivaciju.

**Kalkulator:**  $\left. \frac{d}{dx}(1.15x^2 + x) \right|_{x=6} = 14.8 \text{ m/s.}$

**Odgovor:** D. 14.8 m/s.

13.

Duljina težišnice iz vrha pravoga kuta jednakokračnoga pravokutnog trokuta iznosi  $4\sqrt{2}$  cm. Koliko iznosi površina toga trokuta?

A. 8 cm<sup>2</sup>B. 16 cm<sup>2</sup>C. 32 cm<sup>2</sup>D. 64 cm<sup>2</sup>**Rješenje**

U pravokutnome trokutu težišnica iz vrha pravoga kuta jednaka je polovici hipotenuze, pa je

$$\frac{c}{2} = 4\sqrt{2} \implies c = 8\sqrt{2}.$$

Ako je duljina svake katete  $a$ , tada je  $c = a\sqrt{2}$ , pa iz  $8\sqrt{2} = a\sqrt{2}$  slijedi  $a = 8$ .

**U KNJIŽICI FORMULA**

$$P = \frac{a v_a}{2}.$$

Katete su međusobno okomite, pa jedna može biti osnovica, a druga pripadna visina. Zato je

$$P = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32 \text{ cm}^2.$$

**Odgovor:** C. 32 cm<sup>2</sup>.

14.

Koeficijent sličnosti dvaju sličnih trokuta iznosi 0.5. Koja od navedenih tvrdnji ne vrijedi za takva dva trokuta?

- A. Visina jednoga trokuta dva je puta dulja od odgovarajuće visine drugoga trokuta.
- B. Težišnica jednoga trokuta dva je puta dulja od odgovarajuće težišnice drugoga trokuta.
- C. Opseg jednoga trokuta dva je puta veći od opsega drugoga trokuta.
- D. Površina jednoga trokuta dva je puta veća od površine drugoga trokuta.

### Rješenje

Koeficijent sličnosti 0.5 znači da se odgovarajuće duljine, pa tako i visine, težišnice i opsezi, razlikuju faktorom 2. Površine se razlikuju faktorom  $(0.5)^2 = 0.25$ , odnosno jedna je površina četiri puta veća od druge. Zato tvrdnja D ne vrijedi.

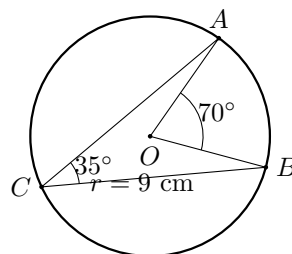
**Odgovor:** D.

15.

Duljina polumjera kružnice iznosi 9 cm. Mjera obodnoga kuta nad tetivom  $AB$  te kružnice iznosi  $35^\circ$ . Koliko iznosi duljina manjega kružnog luka kojega točke  $A$  i  $B$  određuju na toj kružnici?

A.  $1.25\pi$  cmB.  $1.75\pi$  cmC.  $2.5\pi$  cmD.  $3.5\pi$  cm

### Rješenje



Središnji kut nad istim lukom dvostruko je veći od obodnoga kuta:

$$\alpha = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ.$$

#### U KNJIŽICI FORMULA

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}.$$

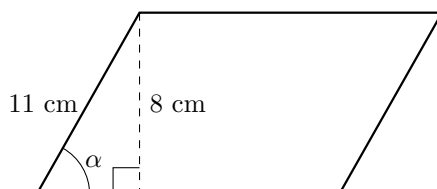
Uvrštavanjem dobivamo

$$l = \frac{9\pi \cdot 70^\circ}{180^\circ} = 3.5\pi \text{ cm}.$$

**Odgovor:** D.  $3.5\pi$  cm.

16.

Koliko iznosi mjera šiljastoga kuta paralelograma kojemu je duljina jedne stranice 11 cm, a duljina visine na drugu stranicu 8 cm?

A.  $36^{\circ}1'39''$ B.  $43^{\circ}20'30''$ C.  $46^{\circ}39'30''$ D.  $53^{\circ}58'22''$ **Rješenje**

Stranica duljine 11 cm hipotenuza je označenoga pravokutnog trokuta, a visina 8 cm kateta je nasuprot traženomu kutu  $\alpha$ .

**U KNJIŽICI FORMULA**

$$\sin \text{ kuta} = \frac{\text{duljina nasuprotne katete}}{\text{duljina hipotenuze}}.$$

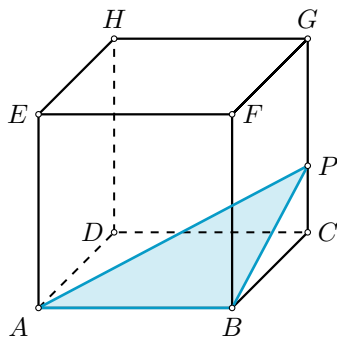
Zato vrijedi

$$\sin \alpha = \frac{8}{11}.$$

**Kalkulator:**  $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{8}{11}\right) = 46^{\circ}39'30''$ .**Odgovor:** C.  $46^{\circ}39'30''$ .

17.

Na slici je prikazana kocka  $ABCDEFGH$ . Točka  $P$  pripada bridu  $\overline{CG}$ .



Što je ortogonalna projekcija trokuta  $ABP$  na ravninu  $BCGF$ ?

A. točka  $C$ B. dužina  $\overline{BP}$ C. trokut  $BCP$ D. četverokut  $BCGF$ **Rješenje**

Točke  $B$  i  $P$  već pripadaju ravnini  $BCG$ , pa se projiciraju same u sebe. Brid  $AB$  okomit je na tu ravninu, stoga se točka  $A$  projicira u točku  $B$ .

Projekcije vrhova  $A$ ,  $B$  i  $P$  zato su redom  $B$ ,  $B$  i  $P$ . Dobiveni je lik dužina  $\overline{BP}$ .

**Odgovor:** B. dužina  $\overline{BP}$ .

18.

Koje su koordinate početne točke  $A$  vektora

$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

kojemu je završna točka  $B(1, -3)$ ?

A.  $A(-3, -6)$       B.  $A(-3, 0)$       C.  $A(3, 0)$       D.  $A(3, 6)$

**Rješenje**

U KNJIŽICI FORMULA

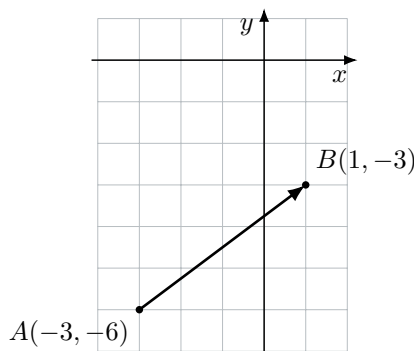
$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Za  $T_1 = A$  i  $T_2 = B$  usporedbom komponenata dobivamo

$$1 - x_A = 4, \quad -3 - y_A = 3.$$

Stoga je

$$x_A = -3, \quad y_A = -6.$$

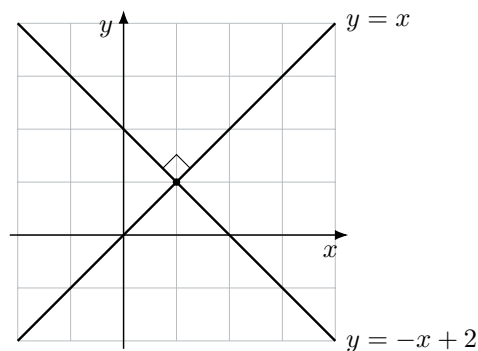


**Odgovor:** A.  $A(-3, -6)$ .

19.

Koliko iznosi mjera kuta određenoga simetralom I. i III. kvadranta koordinatnoga sustava i pravcem  $y = -x + 2$ ?

A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $90^\circ$

**Rješenje**

Simetrala I. i III. kvadranta ima jednadžbu  $y = x$ , pa je njezin koeficijent smjera  $k_1 = 1$ . Za pravac  $y = -x + 2$  vrijedi  $k_2 = -1$ .

**U KNJIŽICI FORMULA**

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Budući da je

$$1 + k_1 k_2 = 1 + 1 \cdot (-1) = 0,$$

pravci su okomiti. Kut između njih iznosi  $90^\circ$ .

**Odgovor:** D.  $90^\circ$ .

20.

Skup  $A$  sadrži pet različitih cijelih brojeva. Razlika najvećega i najmanjega od tih brojeva iznosi 10. Medijan zadanoga skupa brojeva je 15. Koji je najmanji mogući broj u skupu  $A$ ?

A. 5      B. 6      C. 7      D. 8

**Rješenje**

Poredajmo brojeve:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5.$$

Medijan je treći broj, pa je  $a_3 = 15$ . Budući da brojevi moraju biti različiti cijeli brojevi, najmanje moguće vrijednosti veće od 15 jesu

$$a_4 = 16, \quad a_5 = 17.$$

Iz uvjeta  $a_5 - a_1 = 10$  slijedi

$$a_1 = 17 - 10 = 7.$$

Vrijednost je ostvariva, primjerice skupom  $\{7, 14, 15, 16, 17\}$ .

**Odgovor:** C. 7.

21.

Odredite trigonometrijski zapis kompleksnoga broja  $z = -5i$ .

Odgovor: \_\_\_\_\_

**Rješenje**

U KNJIŽICI FORMULA

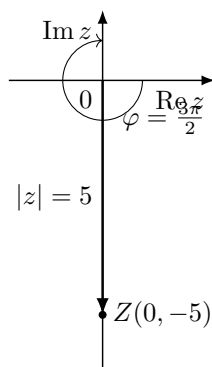
$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Broju  $z = -5i$  pripada točka  $Z(0, -5)$ , pa je

$$r = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5.$$

Točka leži na negativnome dijelu imaginarne osi. Argument u intervalu  $[0, 2\pi)$  zato je

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$



**Odgovor:**  $z = 5 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$

22.

Koliko je puta  $16^{3x+2}$  veće od  $8^{4x+2}$  za svaki realni broj  $x$ ?

Odgovor: \_\_\_\_\_

**Rješenje**

U KNJIŽICI FORMULA

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad a \neq 0.$$

Traženi je omjer

$$\begin{aligned} \frac{16^{3x+2}}{8^{4x+2}} &= \frac{(2^4)^{3x+2}}{(2^3)^{4x+2}} \\ &= 2^{12x+8-(12x+6)} = 2^2 = 4. \end{aligned}$$

**Odgovor:** 4.

**23.**

Izraz

$$\left(-\sqrt[3]{a^2}\right)^6$$

zapišite u obliku jedne potencije s bazom  $a$ .

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Budući da je eksponent paran, predznak minus nestaje. Zatim šestu potenciju zapišemo kao kvadrat treće potencije:

$$\left(-\sqrt[3]{a^2}\right)^6 = \left[\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3\right]^2 = (a^2)^2 = a^4.$$

**Odgovor:**  $a^4$ .

**24.**

Broj gljiva  $N(t)$  na nekome području u prvih nekoliko dana od početka promatranja mijenja se eksponencijalno prema modelu

$$N(t) = 13 \cdot 2^{t+k},$$

pri čemu je  $k \in \mathbb{R}$ , a  $t$  broj dana od početka promatranja. Koliko je gljiva bilo na početku promatranja ako ih je pet dana nakon početka promatranja bilo 1664?

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Uvrštavanjem  $t = 5$  dobivamo

$$13 \cdot 2^{5+k} = 1664.$$

Zato je

$$2^{5+k} = \frac{1664}{13} = 128 = 2^7,$$

pa je  $5 + k = 7$ , odnosno  $k = 2$ . Na početku promatranja  $t = 0$ , stoga

$$N(0) = 13 \cdot 2^2 = 52.$$

**Odgovor:** 52 gljive.

25.

Opći je član konačnoga aritmetičkog niza

$$a_n = 60 - 4n.$$

Koliko članova ima taj niz ako zbroj svih njegovih članova iznosi nula?

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Neka niz ima  $n$  članova. Tada je

$$a_1 = 56, \quad a_n = 60 - 4n.$$

#### U KNJIŽICI FORMULA

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Iz uvjeta  $S_n = 0$  dobivamo

$$0 = \frac{n}{2}(56 + 60 - 4n) = 2n(29 - n).$$

Budući da je  $n$  prirodan broj,  $n \neq 0$ , pa je

$$n = 29.$$

**Odgovor:** 29 članova.

26.

Prvi član geometrijskoga niza tri puta je veći od kvocijenta toga niza. Koliko iznosi kvocijent toga niza ako je zbroj drugoga i trećega člana jednak kvadratu prvoga člana toga niza?

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Označimo prvi član s  $a_1$ , a kvocijent s  $q$ . Iz prvoga uvjeta slijedi

$$a_1 = 3q.$$

#### U KNJIŽICI FORMULA

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Zato su  $a_2 = a_1q$  i  $a_3 = a_1q^2$ . Drugi uvjet daje

$$a_1q + a_1q^2 = a_1^2.$$

Uvrštavanjem  $a_1 = 3q$  dobivamo

$$3q^2 + 3q^3 = 9q^2.$$

Kvocijent geometrijskoga niza nije nula, pa dijeljenjem s  $3q^2$  slijedi

$$1 + q = 3 \implies q = 2.$$

**Odgovor:**  $q = 2$ .

27.

Napišite opći član nekoga niza realnih brojeva koji konvergira prema nuli.

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Dovoljan je jedan primjer. Uzmimo

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Budući da nazivnik neograničeno raste,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Odgovor:** Primjerice,  $a_n = \frac{1}{n}$ .

28.

Odredite derivaciju funkcije

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0.$$

Odgovor:  $f'(x) =$  \_\_\_\_\_

### Rješenje

#### U KNJIŽICI FORMULA

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad (\sin x)' = \cos x.$$

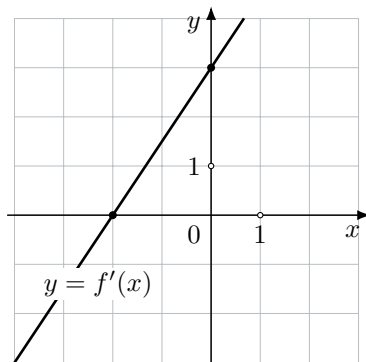
Za  $f_1(x) = \sin x$  i  $g(x) = x$  dobivamo

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

**Odgovor:**  $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ .

29.

Na slici je prikazan graf derivacije kvadratne funkcije  $f$ .



Koji je interval pada funkcije  $f$ ?

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Funkcija  $f$  pada ondje gdje je  $f'(x) < 0$ . S grafa derivacije očitavamo da je pravac ispod osi  $x$  za

$$x < -2.$$

U točki  $x = -2$  derivacija je jednaka nuli, pa ta točka ne pripada otvorenomu intervalu pada.

**Odgovor:**  $\langle -\infty, -2 \rangle$ .

30.

Površina trokuta iznosi  $84 \text{ cm}^2$ , a duljina polumjera njemu upisane kružnice  $3 \text{ cm}$ . Koliko iznosi opseg toga trokuta?

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

U KNJIŽICI FORMULA

$$P = r_u s,$$

gdje je  $s$  poluopseg trokuta.

Uvrštavanjem dobivamo

$$84 = 3s \implies s = 28 \text{ cm}.$$

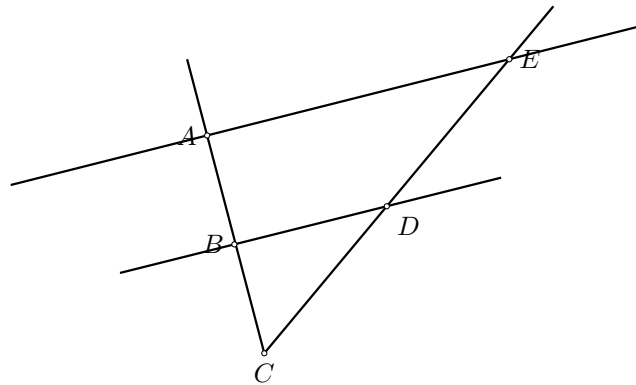
Opseg je dvostruki poluopseg:

$$O = 2s = 56 \text{ cm}.$$

**Odgovor:**  $56 \text{ cm}$ .

31.

Na skici je prikazan kut  $\angle ECA$  koji je presječen dvama paralelnim pravcima  $AE$  i  $BD$ .



Koliko iznosi  $|\overline{BD}|$  ako su  $|\overline{AE}| = 20$  cm i  $|\overline{CD}| : |\overline{DE}| = 3 : 2$ ?

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Budući da je  $BD \parallel AE$ , trokuti  $CDB$  i  $CEA$  slični su. Iz omjera

$$|\overline{CD}| : |\overline{DE}| = 3 : 2$$

možemo zapisati  $|\overline{CD}| = 3k$  i  $|\overline{DE}| = 2k$ . Zato je

$$|\overline{CE}| = |\overline{CD}| + |\overline{DE}| = 5k.$$

Omjer odgovarajućih stranica sličnih trokuta iznosi

$$\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{AE}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{CE}|} = \frac{3}{5}.$$

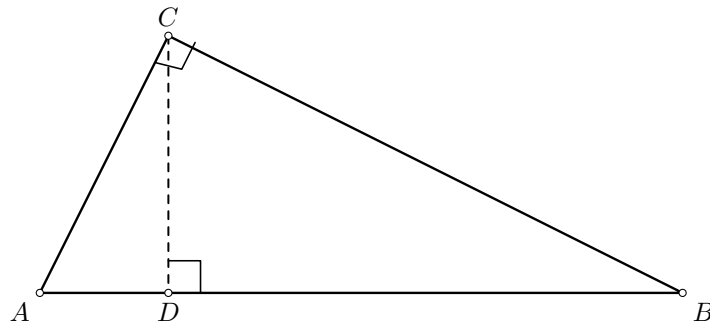
Stoga je

$$|\overline{BD}| = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12 \text{ cm.}$$

**Odgovor:**  $|\overline{BD}| = 12$  cm.

32.

Na skici je prikazan trokut  $ABC$ . Točka  $D$  pripada stranici  $\overline{AB}$ .



Koliko iznosi  $|\overline{AC}|$  ako su  $|\overline{AD}| = 5 \text{ cm}$  i  $|\overline{DB}| = 20 \text{ cm}$ ?

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Najprije je

$$|\overline{AB}| = |\overline{AD}| + |\overline{DB}| = 5 + 20 = 25 \text{ cm.}$$

Poučak o kateti nije naveden u knjižici formula, pa potrebnu jednakost izvodimo iz sličnosti. Trokuti  $ACD$  i  $ABC$  slični su prema poučku kut-kut jer vrijedi

$$\angle ADC = 90^\circ = \angle ACB,$$

a kut pri vrhu  $A$  zajednički je obama trokutima. Zato je

$$\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}.$$

Slijedi

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AD}| \cdot |\overline{AB}| = 5 \cdot 25 = 125,$$

pa je

$$|\overline{AC}| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ cm.}$$

Uzimamo pozitivni korijen jer je riječ o duljini.

**Odgovor:**  $|\overline{AC}| = 5\sqrt{5} \text{ cm.}$

33.

Napišite jednadžbu jedne kružnice polumjera  $r = 5$  kojoj je središte na osi  $y$  i koja prolazi točkom  $T(3, 6)$ .

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Budući da je središte na osi  $y$ , označimo ga sa  $S(0, q)$ .

## U KNJIŽICI FORMULA

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Točka  $T(3, 6)$  pripada kružnici polumjera 5, pa vrijedi

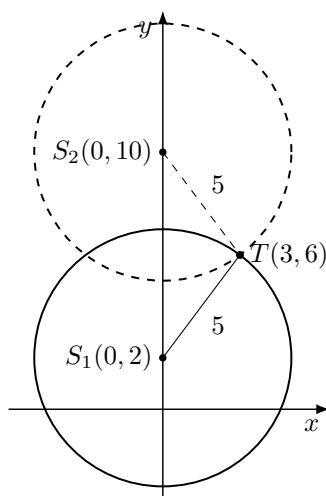
$$3^2 + (6 - q)^2 = 5^2.$$

Zato je

$$(6 - q)^2 = 16 \implies q = 2 \text{ ili } q = 10.$$

Postoje dvije takve kružnice, a zadatak traži jednu. Primjerice, za središte  $S_1(0, 2)$  dobivamo

$$x^2 + (y - 2)^2 = 25.$$



**Odgovor:** Primjerice,  $x^2 + (y - 2)^2 = 25$ . Također vrijedi  $x^2 + (y - 10)^2 = 25$ .

34.

U razredu je 12 djevojaka i 8 mladića. Na koliko se načina može odabrati grupa od pet ravnopravnih članova u kojoj su točno tri djevojke?

Odgovor: \_\_\_\_\_

### Rješenje

Biramo tri od 12 djevojaka i dva od 8 mladića.

## U KNJIŽICI FORMULA

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Prema pravilu umnoška broj grupa iznosi

$$\binom{12}{3} \binom{8}{2}.$$

**Kalkulator:**  $12 \cdot {}_{nCr} 3 \times 8 \cdot {}_{nCr} 2 = 6160$ .

**Odgovor:** 6160.

**35.**

Tena i Marko organizirali su rođendansku proslavu. Unajmili su prostor te naručili pizze i sokove.

**35.1.** Najam prostora s popustom od 12 % platili su 220 eura. Koliko iznosi cijena najma prostora bez popusta izražena u eurima?

Odgovor: \_\_\_\_\_

**35.2.** Cijena je jedne pizze 12 eura, a jednoga soka 3 eura. Koliko su naručili pizza ako su 42 naručena proizvoda (pizza i sokova) ukupno platili 306 eura?

Odgovor: \_\_\_\_\_

**Rješenje 35.1.**

Nakon popusta od 12 % plaćeno je 88 % početne cijene. Ako početnu cijenu označimo s  $x$ , vrijedi

$$0.88x = 220.$$

Zato je

$$x = \frac{220}{0.88} = 250.$$

**Odgovor:** 250 eura.

**Rješenje 35.2.**

Neka je  $p$  broj pizza, a  $s$  broj sokova. Tada vrijedi sustav

$$\begin{cases} p + s = 42, \\ 12p + 3s = 306. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe  $s = 42 - p$ . Uvrštavanjem u drugu dobivamo

$$12p + 3(42 - p) = 306,$$

odnosno

$$9p = 180 \implies p = 20.$$

**Odgovor:** Naručili su 20 pizza.

**36.**

Zadana je kvadratna funkcija  $f(x) = 2x^2 + 4x$ .

**36.1.** Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije  $f$  u točki na grafu kojoj je apscisa jednaka 1.

Odgovor: \_\_\_\_\_

**36.2.** Odredite vrijednost realnoga parametra  $p$  tako da kvadratna funkcija  $g(x) = f(x) + p$  ima točno jednu realnu nultočku.

Odgovor: \_\_\_\_\_

**Rješenje 36.1.**

Apscisa dirališta je  $x_1 = 1$ , a ordinata

$$y_1 = f(1) = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 6.$$

Derivacija je

$$f'(x) = 4x + 4,$$

pa je koeficijent smjera tangente  $f'(1) = 8$ .

**U KNJIŽICI FORMULA**

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1).$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$y - 6 = 8(x - 1) \implies y = 8x - 2.$$

**Odgovor:**  $y = 8x - 2$ .

**Rješenje 36.2.**

Vrijedi

$$g(x) = 2x^2 + 4x + p.$$

U knjižici formula zadana su rješenja kvadratne jednadžbe:

**U KNJIŽICI FORMULA**

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \implies x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dva se rješenja podudaraju kada je izraz pod korijenom jednak nuli. Uvrštavanjem  $a = 2$ ,  $b = 4$  i  $c = p$  dobivamo

$$4^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 0 \implies 16 - 8p = 0 \implies p = 2.$$

**Odgovor:**  $p = 2$ .

**37.**

U trokutu  $ABC$  duljine dviju stranica iznose  $a = 13$  cm i  $b = 17$  cm, a mjera kuta između tih stranica iznosi  $115^\circ$ .

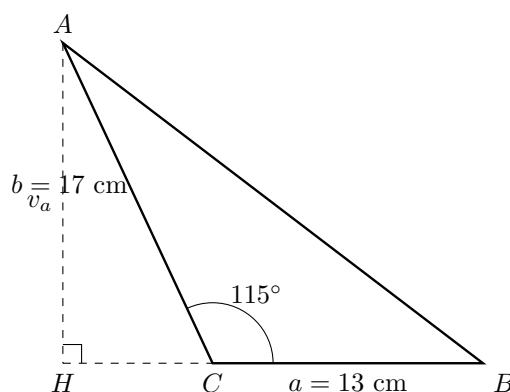
**37.1.** Koliko iznosi duljina visine na stranicu  $a$  toga trokuta?

Odgovor: \_\_\_\_\_

**37.2.** Koliko iznosi duljina treće stranice toga trokuta?

Odgovor: \_\_\_\_\_

**Rješenje 37.1.**



U KNJIŽICI FORMULA

$$P = \frac{av_a}{2}, \quad P = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Izjednačavanjem površina slijedi

$$\frac{av_a}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} \implies v_a = b \sin \gamma.$$

Stoga je

$$v_a = 17 \sin 115^\circ.$$

**Kalkulator:**  $v_a \approx 15.41$  cm.

**Odgovor:**  $v_a \approx 15.41$  cm.

**Rješenje 37.2.****U KNJIŽICI FORMULA**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$c = \sqrt{13^2 + 17^2 - 2 \cdot 13 \cdot 17 \cos 115^\circ}.$$

**Kalkulator:**  $c \approx 25.39$  cm.

**Odgovor:**  $c \approx 25.39$  cm.

**38.**

Riješite zadatke s algebarskim izrazima.

**38.1.** Koliko iznosi vrijednost izraza

$$A^{12} + (2 - A^3)(2 + A^3)(4 + A^6)$$

za svaki realni broj  $A$ ?

Odgovor: \_\_\_\_\_

**38.2.** Odredite sve moguće vrijednosti realnoga broja  $B^3$  za koje je

$$B^{12} - 625 < 0.$$

Rješenje zapišite s pomoću intervala.

Odgovor: \_\_\_\_\_

**Rješenje 38.1.****U KNJIŽICI FORMULA**

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Dvaput primjenjujemo razliku kvadrata:

$$\begin{aligned} A^{12} + (2 - A^3)(2 + A^3)(4 + A^6) &= A^{12} + (4 - A^6)(4 + A^6) \\ &= A^{12} + 16 - A^{12} = 16. \end{aligned}$$

**Odgovor:** 16.

**Rješenje 38.2.**

Uvedimo zamjenu  $t = B^3$ . Tada je  $B^{12} = t^4$ , pa nejednadžba glasi

$$t^4 - 625 < 0.$$

Rastavljanjem na razliku kvadrata dobivamo

$$(t^2 - 25)(t^2 + 25) < 0.$$

Budući da je  $t^2 + 25 > 0$  za svaki realni  $t$ , mora vrijediti

$$t^2 - 25 < 0 \iff -5 < t < 5.$$

Vraćanjem  $t = B^3$  slijedi

$$B^3 \in \langle -5, 5 \rangle.$$

**Odgovor:**  $\langle -5, 5 \rangle$ .

**39.**

Dulja osnovica  $AB$  jednakokračnoga trapeza  $ABCD$  duljine 8 cm i krak  $AD$  duljine 6.32 cm određuju kut čija mjera iznosi  $71^\circ 34'$ .

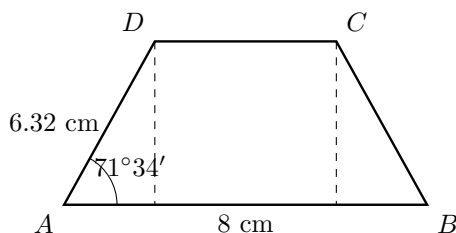
**39.1.** Koliko iznosi duljina kraće osnovice  $CD$ ?

Odgovor: \_\_\_\_\_

**39.2.** Kružnica sa središtem u točki  $S$  opisana je tome trapezu. Koliko iznosi mjera kuta  $\angle BSD$ ?

Odgovor: \_\_\_\_\_

**Rješenje 39.1.**



Vodoravna projekcija svakoga kraka na dulju osnovicu iznosi

$$x = |AD| \cos 71^\circ 34'.$$

Budući da je trapez jednakokračan, vrijedi

$$|CD| = |AB| - 2x.$$

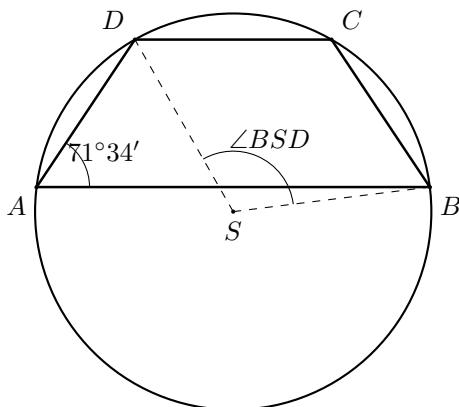
Zato je

$$|CD| = 8 - 2 \cdot 6.32 \cos 71^\circ 34'.$$

**Kalkulator:**  $|CD| \approx 4.00$  cm.

**Odgovor:**  $|\overline{CD}| \approx 4.00$  cm.

**Rješenje 39.2.**



Kut  $\angle BAD = 71^\circ 34'$  obodni je kut nad tetivom  $BD$ , a  $\angle BSD$  središnji je kut nad istom tetivom. Središnji je kut dvostruko veći:

$$\angle BSD = 2 \cdot 71^\circ 34'.$$

Računamo

$$2 \cdot 71^\circ 34' = 142^\circ 68' = 143^\circ 8'.$$

**Odgovor:**  $143^\circ 8'$ .

40.

Dokažite da je vrijednost izraza

$$\frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n-1)!}$$

paran broj za sve prirodne brojeve  $n$ .

**Rješenje**

Iz brojnikâ izlučimo  $(n+1)!$ :

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n-1)!} &= \frac{(n+1)![(n+2) - 1]}{(n-1)!} \\ &= \frac{(n+1)!(n+1)}{(n-1)!} \\ &= n(n+1)^2. \end{aligned}$$

Brojevi  $n$  i  $n+1$  uzastopni su prirodni brojevi, pa je jedan od njih paran. Zato je umnožak  $n(n+1)$  paran, a množenjem s još jednim faktorom  $n+1$  parnost se ne mijenja. Prema tome  $n(n+1)^2$  paran je za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

**Odgovor:** Izraz je jednak  $n(n+1)^2$  i uvijek je paran.

41.

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = x^2 - 4kx + 5k^2 - 6k$$

siječe os  $x$  u točkama  $P$  i  $T$ . Odredite vrijednost realnoga parametra  $k$  za koji udaljenost točaka  $P$  i  $T$  iznosi 6.

### Rješenje

Neka su  $x_1$  i  $x_2$  nultočke funkcije. Tada su  $P(x_1, 0)$  i  $T(x_2, 0)$ , pa uvjet zadatka glasi

$$|x_1 - x_2| = 6.$$

#### U KNJIŽICI FORMULA

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Za zadanu kvadratnu funkciju dobivamo

$$x_1 + x_2 = 4k, \quad x_1 x_2 = 5k^2 - 6k.$$

Koristimo identitet

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2.$$

Uvrštavanjem slijedi

$$\begin{aligned} 36 &= (4k)^2 - 4(5k^2 - 6k), \\ 36 &= -4k^2 + 24k, \\ 0 &= k^2 - 6k + 9 = (k - 3)^2. \end{aligned}$$

Zato je  $k = 3$ .

**Odgovor:**  $k = 3$ .

42.

Odredite vrijednosti realnih parametara  $a$  i  $b$  ako je domena (prirodno područje definicije) funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x + a}}{4b - 3x}$$

skup

$$D_f = [-5, +\infty) \setminus \{2\}.$$

### Rješenje

Za izraz pod korijenom mora vrijediti

$$2x + a \geq 0 \iff x \geq -\frac{a}{2}.$$

Lijevi rub zadane domene iznosi  $-5$ , pa je

$$-\frac{a}{2} = -5 \implies a = 10.$$

Nazivnik ne smije biti jednak nuli:

$$4b - 3x \neq 0 \iff x \neq \frac{4b}{3}.$$

Iz domene je izbačena točka 2, stoga

$$\frac{4b}{3} = 2 \implies b = \frac{3}{2}.$$

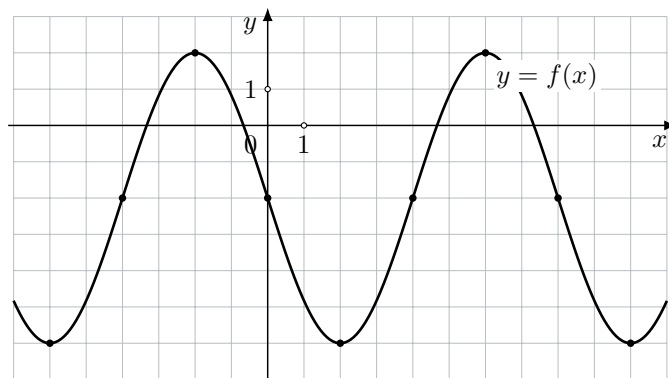


**Odgovor:**  $a = 10$ ,  $b = \frac{3}{2}$ .

43.

Na slici je prikazan graf funkcije

$$f(x) = -4 \sin(Bx) + D, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$



Odredite sve nultočke funkcije  $f$ .

**Rješenje**

S grafa očitavamo  $f(0) = -2$ . Budući da je

$$f(0) = -4 \sin 0 + D = D,$$

slijedi  $D = -2$ .

Dva uzastopna maksimuma nalaze se pri  $x = -2$  i  $x = 6$ , pa je period  $T = 8$ . Za funkciju  $\sin(Bx)$  vrijedi

$$T = \frac{2\pi}{|B|}.$$

Zato je  $|B| = \frac{\pi}{4}$ . Graf u točki  $x = 0$  pada, a  $f'(0) = -4B$ , pa mora biti  $B > 0$ . Dakle

$$B = \frac{\pi}{4}, \quad f(x) = -4 \sin \frac{\pi x}{4} - 2.$$

Nultočke zadovoljavaju

$$-4 \sin \frac{\pi x}{4} - 2 = 0 \iff \sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Za  $u = \frac{\pi x}{4}$  vrijedi

$$u = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad u = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Množenjem s  $\frac{4}{\pi}$  dobivamo

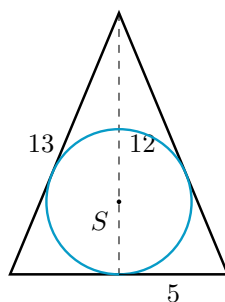
$$x = \frac{14}{3} + 8k \quad \text{ili} \quad x = \frac{22}{3} + 8k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Odgovor:**  $\left\{ \frac{14}{3} + 8k : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{22}{3} + 8k : k \in \mathbb{Z} \right\}.$

44.

Uspravnomu stošcu kojemu su duljine polumjera baze 5 cm i visina 12 cm upisana je kugla. Koliko iznosi vjerojatnost da slučajno odabrana točka unutar toga stošca pripada toj kugli?

**Rješenje**



U osnove presjeka stošca dobivamo jednakokračni trokut osnovice 10 cm, visine 12 cm i krakova

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm.}$$

Polumjer upisane kugle jednak je polumjeru upisane kružnice toga trokuta. Površina i poluopseg osnoga trokuta iznose

$$P = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2, \quad s = \frac{10 + 13 + 13}{2} = 18 \text{ cm.}$$

**U KNJIŽICI FORMULA**

$$P = r_u s.$$

Zato je polumjer kugle

$$r_u = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} \text{ cm.}$$

**U KNJIŽICI FORMULA**

$$P = r^2 \pi, \quad V = \frac{1}{3} B \cdot h, \quad V = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Za stožac je  $B = 5^2\pi$ , a za kuglu je  $r = \frac{10}{3}$  cm. Volumeni iznose

$$V_{\text{stošca}} = \frac{1}{3} \cdot 5^2\pi \cdot 12 = 100\pi,$$

$$V_{\text{kugle}} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{4000}{81}\pi.$$

Za jednoliko biranje točke po volumenu tražena je vjerojatnost omjer volumena:

$$p = \frac{V_{\text{kugle}}}{V_{\text{stošca}}} = \frac{(4000/81)\pi}{100\pi} = \frac{40}{81}.$$

**Odgovor:**  $\frac{40}{81}$ .

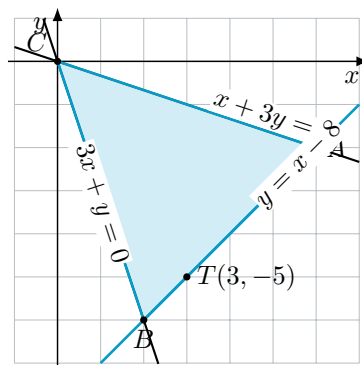
45.

Krakovi jednakokračnoga trokuta  $ABC$  pripadaju pravcima koji su zadani jednačbama

$$x + 3y = 0 \quad \text{i} \quad 3x + y = 0,$$

a točka  $(3, -5)$  pripada njegovoj osnovici. Koliko iznosi volumen (obujam) prizme kojoj je trokut  $ABC$  baza (osnovka), a kojoj je duljina visine 8?

**Rješenje**



**1. Zajednički vrh krakova.** Vrh  $C$  sjecište je zadanih pravaca. Rješavamo sustav

$$\begin{cases} x + 3y = 0, \\ 3x + y = 0. \end{cases}$$

Jedino je rješenje  $x = 0$ ,  $y = 0$ , pa je

$$C(0, 0).$$

**2. Pravac osnovice.** Pravci krakova imaju koeficijente smjera  $-\frac{1}{3}$  i  $-3$ . Njihove su simetrale  $y = x$  i  $y = -x$ . Osnovica jednakokračnoga trokuta okomita je na odgovarajuću simetralu i prolazi točkom  $T(3, -5)$ . Dobivamo dva kandidata:

$$q_1 : y = x - 8, \quad q_2 : y = -x - 2.$$

Za  $q_2$  presjeci s krakovima jesu  $(-3, 1)$  i  $(1, -3)$ . Točka  $T(3, -5)$  nalazi se na pravcu  $q_2$ , ali izvan dužine određene tim presjecima, pa  $q_2$  ne može sadržavati osnovicu trokuta.

Za  $q_1$  vrijedi  $-5 = 3 - 8$ , pa  $T$  pripada tomu pravcu. Njegovi presjeci s krakovima daju vrhove osnove:

$$\begin{cases} y = x - 8, \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(6, -2),$$

$$\begin{cases} y = x - 8, \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2, -6).$$

Točka  $T(3, -5)$  nalazi se između  $B$  i  $A$  jer vrijedi

$$T = B + \frac{1}{4}(A - B).$$

Ujedno je

$$|CA| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}, \quad |CB| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40},$$

pa je trokut doista jednakokrani.

### 3. Površina baze.

#### U KNJIŽICI FORMULA

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Duljina osnovice iznosi

$$|AB| = \sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 - (-6))^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Pravac osnovice  $y = x - 8$  zapisujemo kao  $x - y - 8 = 0$ .

#### U KNJIŽICI FORMULA

$$d(T, p) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Visina trokuta iz vrha  $C(0, 0)$  na osnovicu iznosi

$$v_c = \frac{|0 - 0 - 8|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Zato je površina baze prizme

$$B = P_{\triangle ABC} = \frac{|AB| v_c}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 16.$$

### 4. Volumen prizme.

#### U KNJIŽICI FORMULA

$$V = B \cdot h.$$

Konačno,

$$V = 16 \cdot 8 = 128.$$

**Odgovor:**  $V = 128$  kubičnih jedinica.

