impuls-znanja.hr

Matematika A na državnoj maturi

Rješenja ljetnog roka 2025.

info@impuls-znanja.hr

1. Kojoj je od navedenih točaka u Gaussovoj ravnini pridružen kompleksan broj kojemu argument iznosi $\frac{3\pi}{2}$?

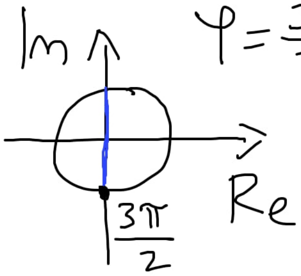
A) $(-4, 0)$

B) $(0, -4)$

C) $(0, 4)$

D) $(4, 0)$

$\varphi = \frac{3\pi}{2}$



2. Čemu je jednako $a \cdot \sqrt[3]{a}$ za svaki realni broj a ?

A) $a^{\frac{1}{3}}$

B) $a^{\frac{2}{3}}$

C) $a^{\frac{4}{3}}$

D) $a^{\frac{5}{3}}$

$$a \cdot \sqrt[3]{a} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{1+\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}}$$

3. Koliko iznosi x ako je izraz $(3a-1)(9a^2 + xa + 1)$ razlika kubova za svaki realni broj a ?

A) -6

B) -3

C) 3

D) 6

OPĆENITO VRIJEDI: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

PREPOZNAJEMO: $a = 3a$

$b = 1$

$$\Rightarrow \quad a \cdot b = x \cdot a$$

$$3\cancel{a} \cdot 1 = x \cdot \cancel{a}$$

$$\boxed{x = 3}$$

4. Sonjina i Matijina zarada u omjeru su 2 : 3, a Matija je zaradio 2 puta više od Ivana. U kakvome su odnosu Sonjina i Ivanova zarada?

A) Sonja i Ivan zaradili su jednako.

B) Sonja je zaradila manje od Ivana.

C) Sonjina i Ivanova zarada u omjeru su 2 : 1.

D) Sonjina i Ivanova zarada u omjeru su 4 : 3.

$$S : M = 2 : 3 \Rightarrow S = \frac{2}{3} M$$

$$M = 2 \cdot I \Rightarrow I = \frac{1}{2} M$$

$$S : I = ?$$

$$\boxed{S : I} = \frac{S}{I} = \frac{\frac{2}{3}\cancel{M}}{\frac{1}{2}\cancel{M}} = \frac{4}{3} \boxed{= 4 : 3}$$

5. Postotak prodanih ulaznica po danima u nekome tjednu prikazan je tablicom.

Dan	**Postotak prodanih ulaznica**
Ponedjeljak	40 %
Utorak	75 %
Srijeda	75 %
Četvrtak	75 %
Petak	80 %
Subota	80 %
Nedjelja	40 %

Koliko je prosječno ulaznica prodano dnevno u tome tjednu ako je svakoga dana u prodaji 420 ulaznica?

A) 238

B) 273

C) 279

D) 315

$$\bar{P} = \frac{420 \cdot (0{,}4 + 0{,}75 + 0{,}75 + 0{,}75 + 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}4)}{7}$$

$$\boxed{\bar{P} = 279}$$

6. Potrebno je iskopati bunar dubok 20 m. Za kopanje prvoga metra cijena je 30 eura, a za svaki sljedeći 8 eura više od prethodnoga metra. Kolika je cijena cijeloga iskopa?

A) 752 eura

B) 1140 eura

C) 1520 eura

D) 2120 eura

Možemo prepoznati da je riječ o aritmetičkom nizu. Razlog je taj što imamo fiksno povećanje od 8 eura za svaki idući metar.

$$a_1 = 30$$
$$d = 8$$
$$n = 20$$
$$S_{20} = ?$$

$$a_{20} = a_1 + 19d$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_1 + 19d)$$
$$\boxed{S_{20}} = 10(30 + 30 + 19 \cdot 8) \boxed{= 2120 €}$$

7. Linearna funkcija $f(x) = ax + b$ zadana je tablicom:

x	-1	7
$f(x)$	5	2

Što od navedenoga vrijedi za koeficijente a i b?

A) $a < 0$ i $b > 0$

B) $a < 0$ i $b < 0$

C) $a > 0$ i $b < 0$

D) $a > 0$ i $b > 0$

$$f(x) = y$$

OPĆENITO: $y = ax + b$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= -a + b \\ 2 &= 7a + b \end{aligned}\right\} \ominus$$

$$3 = -8a \Rightarrow a = -\frac{3}{8} < 0$$

$$b = 5 + a = \frac{37}{8} > 0$$

8. Koliko iznosi najveća vrijednost funkcije $g(x) = -2(x-3)(x+5)$?

A) 16

B) 24

C) 32

D) 48

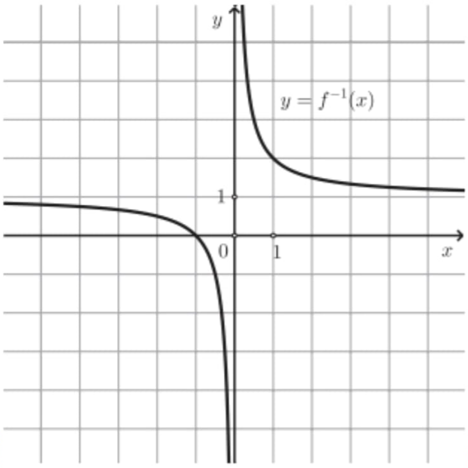
Ovo je zapravo kvadratna jednadžba oblika $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$\Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -5 \Rightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3-5}{2} = -1$$

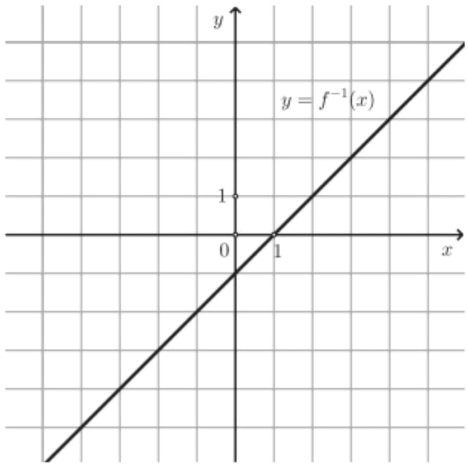
$$y_0 = g(x_0) = -2(-1-3) \cdot (-1+5)$$

$$\boxed{y_0 = 32}$$

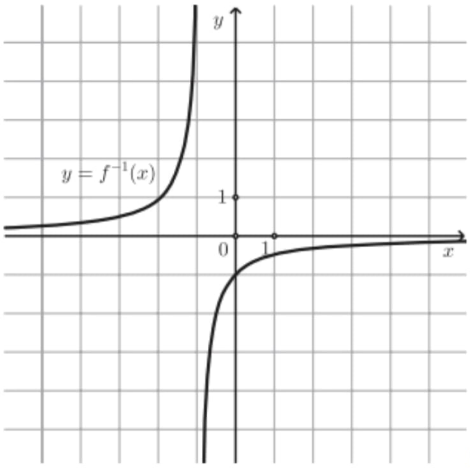
9. Koji je od prikazanih grafova graf funkcije koja je **inverzna** funkciji $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$?



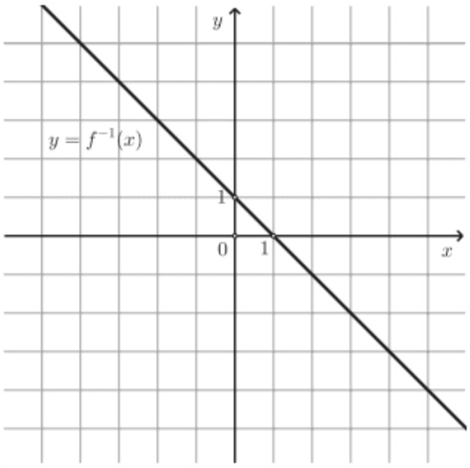
A.



B.



C.



D.

NAĐIMO INVERZ:

$$Y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{y+1}{y}$$

$$\boxed{f^{-1}(x)} = \frac{x+1}{x} = \boxed{1 + \frac{1}{x}}$$

10. Koja je od navedenih funkcija parna?

Funkcija je parna ako vrijedi f(-x)=f(x)

A) $f(x) = (x-7)^2$

B) $f(x) = x^2 - 7x$

C) $f(x) = |x-7|$

D) $f(x) = |x| - 7$

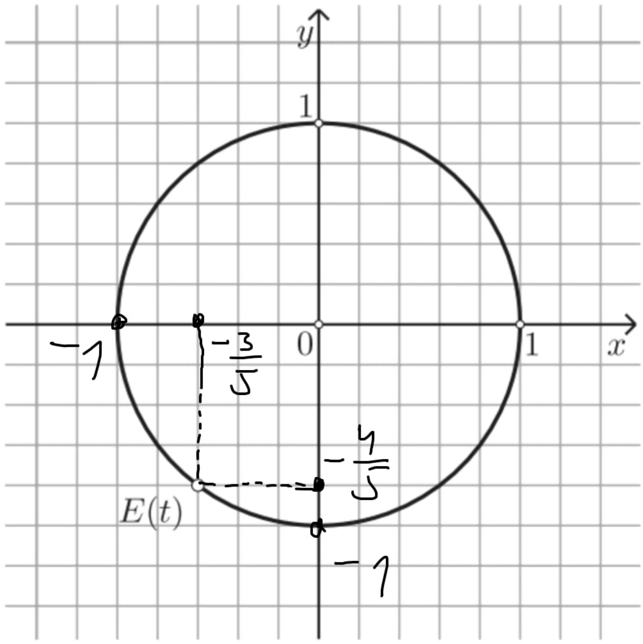
$A: f(-x) = (-x-7)^2 = [-(x+7)^2] = (x+7)^2$

$B: f(-x) = (-x)^2 - 7 \cdot (-x) = x^2 + 7x$

$C: f(-x) = |-x-7| = |-(x+7)| = |x+7|$

$D: f(-x) = |-x| - 7 = |x| - 7$

11. Koja od navedenih tvrdnji vrijedi za broj pridružen točki $E(t)$ sa slike?



OČITAMO: $\cos t = -\frac{3}{5}$

$\sin t = -\frac{4}{5}$

A) $5\sin t - 3 = 0$

B) $5\sin t + 4 = 0$

C) $5\cos t - 3 = 0$

D) $5\cos t + 4 = 0$

Vidimo da od ponuđenih odgovora jedino odgovara pod B)

12. Procijenjeno je da se broj jedinki neke populacije mijenja prema formuli

$$S_n = 14\,000 \cdot 2^{0.05n},$$

gdje je n broj godina od početka praćenja. Koja je od navedenih tvrdnja istinita?

A) Broj jedinki će se tijekom vremena smanjivati.

B) Nakon jedne godine bit će 14 000 jedinki.

C) Nakon dvije godine povećat će se broj jedinki za 1500.

D) Nakon 20 godina udvostručit će se broj jedinki.

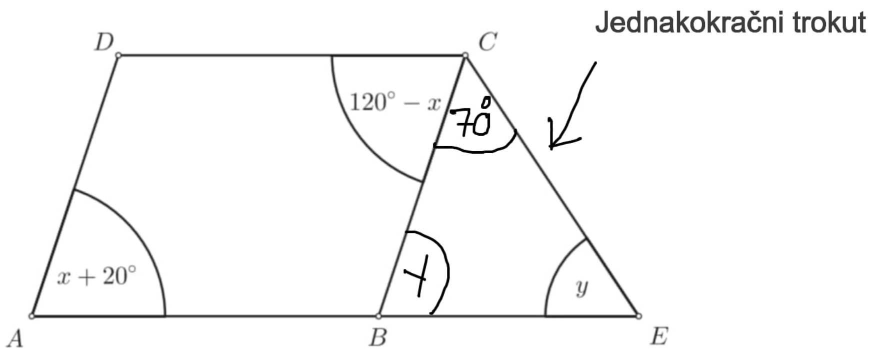
A): ZA $n = 1 \Rightarrow S_1 = 14\,000 \cdot 2^{0.05 \cdot 1} = 14\,490$ X

B): IZ A) $\Rightarrow$ X

C): $S_2 = 14\,000 \cdot 2^{0.05 \cdot 2} = 15\,005 \Rightarrow \Delta S = 1005$ X

D) $S_{20} = 28\,000$ ✓

13. Četverokut $ABCD$ prikazan na skici je paralelogram. Točka E pripada pravcu AB i vrijedi $|BE| = |BC|$.



Koliko iznosi mjera kuta y?

IZ $x + 20° = 120° - x \Rightarrow x = 50°$

TROKUT: $y + y + 70° = 180°$

$2y = 110° \quad /:2$

$\boxed{y = 55°}$

A) 45°

B) 50°

C) 55°

D) 70°

14. Koliki dio kružnice odsijecaju krajnje točke tetive koja odgovara obodnome kutu mjere 36°?

A) petinu

B) šestinu

C) devetinu

D) desetinu

$x = ?$

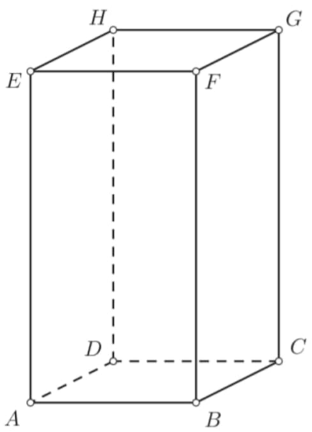
Obodni kut nad lukom iznosi polovicu središnjeg kuta.

β α

$$\alpha = 2\beta = 72^\circ$$

$$\boxed{x} = \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{72^\circ}{360^\circ} \boxed{= \frac{1}{5}}$$

15. Na skici je prikazan kvadar $ABCDEFGH$. Koji od navedenih pravaca siječe pravac BH?



pravci BH i AG su prostorne dijagonale kvadra
i one se međusobno sijeku.

A) AC

B) AD

C) AE

D) AG

16. Kolika je duljina stranice kvadrata koji, rotirajući oko jedne svoje stranice, čini valjak volumena 64π cm^3?

A) 4 cm

B) 8 cm

C) 12 cm

D) 16 cm

$V = 64\pi \text{ cm}^3$

$a = ?$

BAZA

VISINA

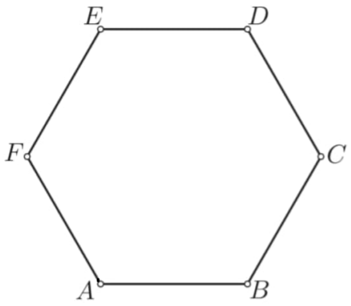
VALJAK: $V = B \cdot v$

$$V = a^2\pi \cdot a = a^3\pi$$

$$\Rightarrow a^3 = \frac{V}{\pi} = \frac{64\cdot\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 64 \quad / \sqrt[3]{\ }$$

$$\boxed{a = 4 \text{ cm}}$$

17. Na skici je prikazan pravilan šesterokut $ABCDEF$. Koji je od navedenih vektora jednak $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FA}$?



$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FD}$$

SA SKICE: $\boxed{\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AC}}$

A) $\overrightarrow{AC}$

B) $\overrightarrow{CE}$

C) $\overrightarrow{DF}$

D) $\overrightarrow{FB}$

18. Koja od navedenih tvrdnja vrijedi za koeficijente A i B pravaca

$$Ax+4y-5=0 \quad \text{i} \quad x+By-1=0$$

ako je mjera kuta između tih pravaca 90°?

$$Ax+4y-5=0 \Rightarrow y=\overbrace{-\frac{A}{4}}^{a_1}x+\frac{5}{4}$$

$$x+By-1=0 \Rightarrow y=\underbrace{-\frac{1}{B}}_{a_2}x+\frac{1}{B}$$

A) $A+B=5$

B) $4+4B=0$

C) $AB=4$

D) $5AB-1=0$

$$\boxed{a_1\cdot a_2=-1}$$

$$-\frac{A}{4}\cdot\left(-\frac{1}{B}\right)=-1 \Rightarrow \boxed{A+4B=0}$$

19. Koja je od navedenih tvrdnja istinita za skup podataka

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5?$$

A) Mod iznosi 3. Ovo nije istina jer je mod jednak 2 (imamo najviše dvojki u našem skupu podataka)

B) Medijan iznosi 2. Očitamo da je medijan 3, a ne 2

C) Donji kvartil iznosi 2. Po poretku vidimo da je ovo točno

D) Gornji kvartil iznosi 5. Vidimo da bi gornji kvartil trebao biti između 4 i 5, a ne točno 5

20. U razredu koji ima 20 učenika bira se tročlani tim koji se sastoji od voditelja i dvaju ravnopravnih članova. Na koliko se različitih načina može izabrati takav tim?

A) 1140

B) 2280

C) 3420

D) 6840

Imamo 20 učenika, pa možemo na 20 načina odabrati jednog voditelja.

Kad odaberemo voditelja, ostaje još 19 učenika. Trebamo odabrati bilo koja 2 učenika, redoslijed nije bitan. To možemo napraviti na:

$$\binom{19}{2} = 171 \text{ načina.}$$

Za svakog od 20 mogućih voditelja, imamo 171 način da odaberemo preostala 2 člana, pa je ukupan broj mogućih timova:

$$20 \cdot 171 = \boxed{3420}$$

21. Izračunajte

$$\frac{2^{2024}}{100} - \frac{200^{2024}}{100^{2025}}.$$

$$\frac{2^{2024}}{100} - \frac{(2\cdot 100)^{2024}}{100^{2025}} = \frac{2^{2024}}{100} - \frac{2^{2024}\cdot 100^{2024}}{100^{2025}} = \frac{2^{2024}}{100} - \frac{2^{2024}}{100} \boxed{=0}$$

22. Na crte zapišite cijele brojeve tako da vrijedi jednakost:

$$\left(\sqrt{1250} + \sqrt{6}\right)^2 = \underline{1256} + \underline{100}\sqrt{3}.$$

$$\left(\sqrt{1250} + \sqrt{6}\right)^2 = 1250 + 2\underbrace{\sqrt{7500}}_{\text{CASIO}} + 6 = 1256 + 100\sqrt{3}$$

23. U izrazu

$$\left(5x - \frac{x^2+1}{x}\right) \cdot \frac{x}{2x+1}$$

provedite naznačene operacije za sve x za koje je izraz definiran te rezultat pojednostavnite do kraja.

$$\left(5x - \frac{x^2+1}{x}\right) \cdot \frac{x}{2x+1} = \left(\frac{4x^2-1}{\cancel{x}}\right) \cdot \frac{\cancel{x}}{2x+1} = \frac{4x^2-1}{2x+1} =$$

$$= \frac{(2x-1)\cancel{(2x+1)}}{\cancel{(2x+1)}} = \boxed{2x-1}$$

24. Koliki je postotak alkohola u sredstvu za dezinfekciju koje se dobije miješanjem 1.5 litre 60 %-tnoga alkohola s 2.5 litre 80 %-tnoga alkohola?

Račun smjese koristi se kad sastojci imaju različite količine:

$$s = \frac{k_1 \cdot s_1 + k_2 \cdot s_2 + \cdots + k_n \cdot s_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n},$$

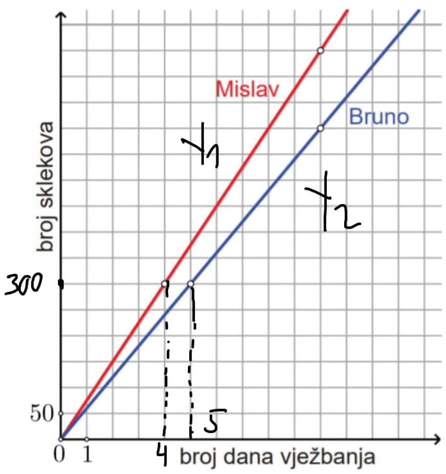
gdje 1. sastojak imamo u količini k_1 sa svojstvom s_1 i tako dalje.

ZA $n = 2$

$$s = \frac{k_1 \cdot s_1 + k_2 \cdot s_2}{k_1 + k_2} = \frac{1.5 \cdot 0.6 + 2.5 \cdot 0.8}{1.5 + 2.5}$$

$$\boxed{s = 72.5}$$

25. U koordinatnome sustavu prikazan je ukupni broj sklekova koje su Bruno i Mislav napravili od početka vježbanja ovisno o broju dana vježbanja. Nakon koliko je dana vježbe Mislav napravio 270 sklekova više od Bruna?



Mislav: $y_1 = a_1 \cdot x \quad (b = 0)$

Bruno: $y_2 = a_2 \cdot x \quad (b = 0)$

$x = ?$

Sa grafa očitamo: $a_1 = \frac{300}{4} = 75 \;;\; y_1 = 75 \cdot x$

$a_2 = \frac{300}{5} = 60 \;;\; y_2 = 60 \cdot x$

Uvjet zadatka: $y_1 = y_2 + 270$

$75x = 60x + 270 \Rightarrow \boxed{x = 18}$

26. Koliko iznosi realni dio kompleksnoga broja

$$3i^{4k+1} \cdot (2 + i)$$

za svaki prirodni broj k?

$$3i^{4k+1} \cdot (2+i) = 3\underbrace{i^{4k}}_{=1} \cdot i \cdot (2+i) = 3i(2+i) = 6i + 3i^2$$

$$= \underbrace{6i}_{Im} \underbrace{-3}_{Re}$$

$$\boxed{\text{Rj. } -3}$$

27. Umnožak rješenja kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + 8x + 3 = 0$$

jednak je 1. Odredite vrijednost koeficijenta a.

$c = 3$

$x_1 \cdot x_2 = 1$

$a = ?$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$1 = \frac{3}{a} \Rightarrow \boxed{a = 3}$

28. U pravokutnome trokutu duljina je jedne katete 20 cm, a duljina težišnice na hipotenuzu 26 cm. Koliko iznosi duljina druge katete toga trokuta?

$a = 20$ cm

$t_c = 26$ cm

$b = ?$

Iz Talesovog poučka, znamo $c = 2 \cdot t_c = 2 \cdot 26 = 52$ cm

Iz $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{52^2 - 20^2}$

$\boxed{b = 48 \text{ cm}}$

29. Površina jednoga jednakostraničnog trokuta 16 je puta veća od površine drugoga jednakostraničnog trokuta. Razlika duljina njihovih stranica iznosi 21 cm. Kolika je duljina stranice manjega od tih trokuta?

$\frac{P'}{P} = 16$

$a' - a = 21$ cm

$a = ?$

Imamo dva slična trokuta. Vrijedi da je omjer njihovih površina:

$\frac{P'}{P} = k^2 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$

$\frac{a'}{a} = k \Rightarrow a' = 4 \cdot a$

$21 + a = 4a$

$\Rightarrow \boxed{a = 7 \text{ cm}}$

30. Dvije kružnice polumjera 12 cm i 7 cm dodiruju se izvana. Koliko iznosi udaljenost od točke u kojoj se sijeku vanjske zajedničke tangente tih kružnica do središta manje kružnice?

Neka je tražena udaljenost x. Koristeći Talesov poučak, imamo

$x : 7 = (x + 7 + 12) : 12$

$x : 7 = (x + 19) : 12$

$12x = 7(x + 19) \Rightarrow \boxed{x = 26.6 \text{ cm}}$

31. Napišite jednadžbu neke kružnice polumjera 2 koja dira obje koordinatne osi.

Općenito, jednadžba kružnice je $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$.

Kružnica dodiruje obje koordinatne osi ako i samo ako vrijedi $|p|=|q|=r$.

Npr. $p=q=2 \implies \boxed{(x-2)^2+(y-2)^2=4}$

32. Za koju vrijednost realnoga broja p vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+5pn}{4n-3}=4?$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+5pn \;/:n}{4n-3 \;/:n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\frac{1}{n}}^{\to 0}+5p}{4-\cancel{\frac{3}{n}}^{\to 0}}=\frac{5p}{4}$$

IZ UVJETA: $\frac{5p}{4}=4 \implies \boxed{p=\frac{16}{5}}$

33. Odredite koordinate točke grafa funkcije

$$f(x)=x^2-3x+7$$

u kojoj je koeficijent smjera (nagib) tangente jednak 1.

Neka je tražena točka $T(x_0,y_0)$.

<u>UVJET</u>: $f'(x_0)=1$

$2x_0-3=1 \implies \boxed{x_0=2}$

$y_0=f(x_0)=2^2-3\cdot2+7$

$\boxed{y_0=5}$

$\boxed{T=(2,5)}$

34. Funkcija

$$f'(x) = \frac{x+1}{10}$$

derivacija je funkcije f. Odredite interval rasta funkcije f.

Pošto se traži interval rasta funkcije, gledamo za koje x-eve vrijedi f'(x)>0.

$$f'(x) > 0$$

$$\frac{x+1}{10} > 0$$

Nazivnik će očito uvijek biti veći od 0, tako da postavljamo uvjet:

$$x+1 > 0$$

$$x > -1 \text{, tj. } \boxed{x \in \langle -1, +\infty \rangle}$$

35. Zadan je skup

$$A = \left\langle 1, \frac{11}{6} \right\rangle.$$

$$A = \left\langle \frac{6}{6}, \frac{11}{6} \right\rangle$$

35.1. Napišite jedan racionalni broj koji pripada skupu A.

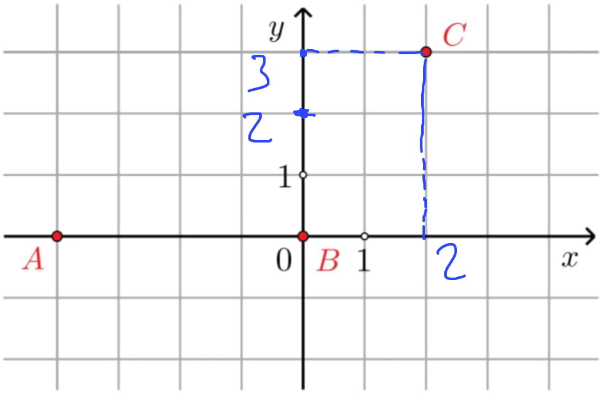
Npr. $\boxed{\frac{7}{6}}$

35.2. Napišite neki interval B za koji vrijedi $A \cup B = B$.

Rješenje zadatka je bilo koji interval čiji je podskup skup A.

Najlakše nam je uzeti: $\boxed{B = \left[1, \frac{11}{6}\right]}$

36. U koordinatnome sustavu na slici prikazani su vrhovi trokuta ABC.



36.1. Odredite duljinu visine iz vrha C.

Očitamo s grafa: $\boxed{v_c = 3}$

36.2. Odredite duljinu polumjera kružnice sa središtem u točki B koja prolazi točkom C.

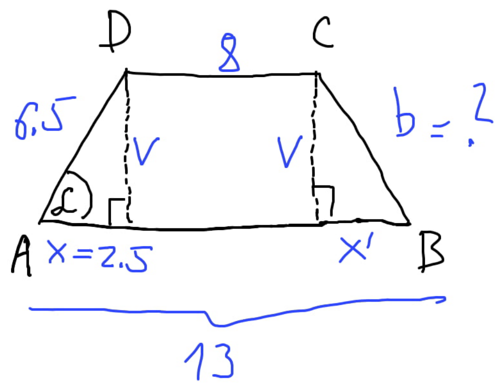
$B = (0, 0)$, $C = (2, 3)$

$r = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2}$

$\boxed{r = \sqrt{13}}$

37. Duljine osnovica trapeza $ABCD$ su $|AB| = 13\,\text{cm}$ i $|CD| = 8\,\text{cm}$. Duljina je kraka $|AD| = 6.5\,\text{cm}$, a mjera kuta između osnovice $\overline{AB}$ i kraka $\overline{AD}$ iznosi $57°$.

37.1. Koliko iznosi duljina kraka $\overline{BC}$?



$|AB| = a = 13$ cm

$|CD| = c = 8$ cm

$|AD| = d = 6.5$ cm

$\alpha = 57°$

$|BC| = b = ?$

$V = 6.5 \cdot \sin\alpha = 6.5 \cdot \sin(57°) = 5.45$ cm

$x' = 13 - 8 - 2.5 = 1.46$ cm

$\boxed{b} = \sqrt{V^2 + x'^2} = \sqrt{5.45^2 + 1.46^2} = \boxed{5.64 \text{ cm}}$

37.2. Koliko iznosi površina toga trapeza?

$$P = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$$

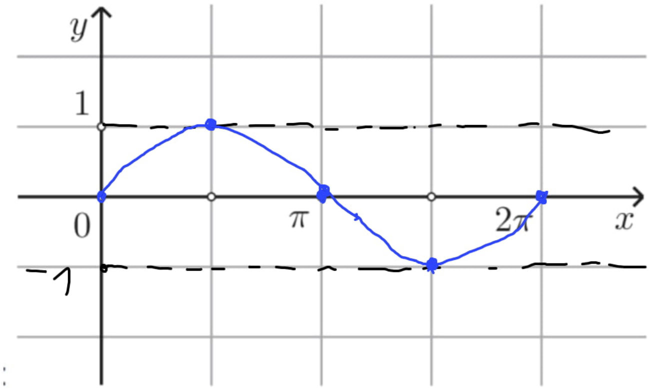
$$P = \frac{(13+8)\cdot 5.45}{2}$$

$$\boxed{P = 57.24 \text{ cm}^2}$$

38. Zadana je funkcija $f(x) = \sin x$.

38.1. U koordinatnome sustavu nacrtajte graf funkcije f na intervalu $[0, 2\pi]$.

x	$f(x)$
0	0
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1
2π	0



38.2. Odredite sliku funkcije $g(x) = 4f(x) - 1$.

$$g(x) = 4 \cdot \sin x - 1$$

$$\operatorname{Im}(g) = ?$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad / \cdot 4$$

$$-4 \leq 4\sin x \leq 4 \quad / -1$$

$$-5 \leq \underbrace{4\sin x - 1}_{g(x)} \leq 3$$

$$-5 \leq g(x) \leq 3$$

$$\boxed{\operatorname{Im}(g) = [-5, 3]}$$

39. Neka je funkcija

$$f(x) = \frac{2x}{5-x}.$$

39.1. Odredite derivaciju f' funkcije f.

$$\boxed{f'(x)} = \frac{2(5-x)-[(-1)\cdot 2x]}{(5-x)^2} = \frac{10-\cancel{2x}+\cancel{2x}}{(5-x)^2} \boxed{= \frac{10}{(5-x)^2}}$$

39.2. Odredite domenu (prirodno područje definicije) funkcije $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

$$g(x) = \sqrt{\frac{2x}{5-x}}$$

UVJET: $\frac{2x}{5-x} \geq 0$

$\langle -\infty, 0\rangle$ ✗

$[0, 5\rangle$ ✓

$[5, +\infty\rangle$ ✗

$$\boxed{\mathcal{D}_g = [0, 5\rangle}$$

40. Dokažite da **ne postoji** realni broj x za koji vrijedi

$$\log_a(x-7) + \log_a(x) = \log_a(x-15)$$

za svaki realni broj $a > 0,\ a \neq 1$.

Postupak:

$x - 7 > 0$ $\quad$ $x > 0$ $\quad$ $x - 15 > 0$

$x > 7$ $\quad\quad\quad\quad\quad$ $x > 15$

Sada vidimo da je početni uvjet: $\boxed{x > 15}$ i krećemo u rješavanje jednadžbe.

$$\cancel{\log_a}\left[(x-7)\cdot x\right] = \cancel{\log_a}(x-15)$$

$$x^2 - 7x = x - 15$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3$$

Budući da su oba rješenja naše kvadratne jednadžbe manja od 15, to znači da početna logaritamska jednadžba nema rješenja.

41. Odredite duljinu vektora $2\vec{a}+\vec{b}$ ako su $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, a mjera kuta između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iznosi $150°$.

Postupak:

$$|\vec{a}|=\sqrt{3}$$
$$|\vec{b}|=1$$
$$\varphi=150^\circ$$

$$|2\vec{a}+\vec{b}|=?$$

OPĆENITO: $|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$

$$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{4\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot2\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\cdot1\cdot\cos(150^\circ)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$$
$$\vec{b}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}$$
$$\vec{b}\cdot\vec{b}=1\cdot1=1$$

$$\boxed{|2\vec{a}+\vec{b}|}=\sqrt{4\cdot3+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+1}\boxed{=\sqrt{7}}$$

42. Koliko iznosi vjerojatnost da je slučajno odabrani realni broj x iz skupa rješenja nejednadžbe

$$|2x - 5| \leq 13$$

pozitivan broj?

Postupak: $P(x>0) = ?$

$$|2x-5| \leq 13$$

$$-13 \leq 2x-5 \leq 13$$

$$-13 \leq 2x-5 \qquad\qquad 2x-5 \leq 13$$

$$2x-5 \geq -13 \qquad\qquad 2x \leq 18 \quad /:2$$

$$2x \geq -8 \quad /:2 \qquad\qquad \underline{x \leq 9}$$

$$\underline{x \geq -4}$$

$$x \in [-4, 9]$$

Vidimo da imamo ukupno 13 brojeva na raspolaganju, ali samo 9 ih je veće od nule pa je tražena vjerojatnost:

$$\boxed{P(x>0) = \frac{9}{13}}$$

43. Odredite **sve** realne brojeve x za koje su 1, $\cos(5x)$ i $\sin^2(5x)$ tri uzastopna člana geometrijskoga niza.

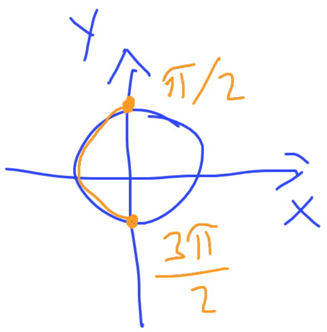
Postupak:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \cos(5x)$$
$$a_3 = \sin^2(5x)$$

$$x = ?$$

Za članove geometrijskog niza vrijedi:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$
$$\cos^2(5x) = 1 \cdot \sin^2(5x)$$
$$\cos^2(5x) - \sin^2(5x) = 0$$
$$\left\{ \text{IDENTITET: } \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \right\}$$



$$\cos(2 \cdot 5x) = 0$$
$$\cos(10x) = 0 \quad / \cos^{-1}$$
$$10x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad /:10$$
$$\boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

44. Duljina bočnoga brida pravilne uspravne šesterostrane prizme iznosi 15 cm, a volumen $1440\sqrt{3}$ cm^3. Koliko iznosi **oplošje** uspravnoga stošca **upisanoga** u tu prizmu?

Postupak:

$$h = 15 \text{ cm}$$
$$V = 1440\sqrt{3} \text{ cm}^3$$
$$O = ?$$

OPĆENITO: $V = B \cdot h$.

Baza pravilne šesterostrane prizme je pravilan šesterokut koji se dijeli na 6 jednakih jednakostraničnih trokuta, pa možemo pisati:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V = B \cdot h \implies B = \frac{V}{h}$$

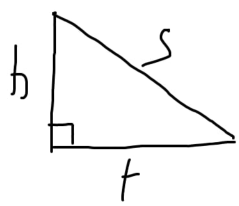
$$6 \cdot \frac{a^2\cancel{\sqrt{3}}}{4} = \frac{1440\cancel{\sqrt{3}}}{15}$$

$$\implies a = 8 \text{ cm}$$ - osnovni brid naše šesterostrane prizme

Polumjer kružnice upisane u pravilan šesterokut jednak je duljini visine jednoga od šest trokuta koji tvore taj šesterokut, tj.

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Sada možemo izračunati izvodnicu stošca pomoću Pitagorinog poučka:



$$s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{15^2 + (4\sqrt{3})^2}$$
$$s = \sqrt{273} \text{ cm}$$

Konačno, traženo oplošje računamo kao:

$$O = B + P = r^2\pi + r\pi s$$

$$\boxed{O = 510.42 \text{ cm}^2}$$

45. Točka $C(x_C, y_C)$ nalazi se u prvome kvadrantu koordinatnoga sustava i pripada grafu parne kvadratne funkcije kojoj je maksimalna vrijednost 9, a jedna nultočka $-3\sqrt{3}$. Točka A ortogonalna je projekcija točke C na os y, a točka B ortogonalna je projekcija točke C na pravac $y + y_C = 0$. Koliko iznosi najveća moguća površina trokuta ABC?

Postupak:

Parna funkcija znači da je simetrična oko osi y, tj. vrijedi $b = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$.

$x_1 = -3\sqrt{3}$. ZNAMO: $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_2 = +3\sqrt{3}$ $\qquad \underbrace{a+b}\ \underbrace{a-b}$

Kvadratnu funkciju općenito možemo pisati kao $f(x) = a(x - x_1)\cdot(x - x_2) = a(x + 3\sqrt{3})(x - 3\sqrt{3})$

$$f(x) = a(x^2 - 27)$$

Znamo da su koordinate maksimuma (0, 9) iz čega možemo dobiti koeficijent a kao:

$$f(0) = 9 = a(0^2 - 27) \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow \underbrace{f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 9}$$

$$\Rightarrow y_C = -\frac{1}{3}x_C^2 + 9$$

U zadatku kaže da je točka A ortogonalna projekcija točke C na os y, što znači da ima istu y koordinatu, ali je x nula, tj. $A = (0, y_C)$.

Također, iz uvjeta za točku B imamo: $y + y_C = 0 \Rightarrow y = -y_C \Rightarrow B = (x_C, -y_C)$.

Nadalje, koristimo formulu za površinu trokuta zadanog s trima točkama:

$$\underbrace{P} = \frac{1}{2}\left|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\right| = \underbrace{x_C \cdot y_C}$$

UVRSTIMO $y_C = -\frac{1}{3}x_C^2 + 9 \Rightarrow P(x_C) = x_C\cdot\left(-\frac{1}{3}x_C^2 + 9\right) = -\frac{1}{3}x_C^3 + 9x_C$

Sada tražimo maksimum funkcije, tj. mora vrijediti P'(x)=0:

$$P'(x) = 0$$

$$-\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 + 9 = 0$$

$$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$P''(x) = -2x < 0 \ \text{- MAX.}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = +3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_C} = -\frac{1}{3}\cdot 3^2 + 9 \boxed{= 6}$$

$$P = x_C \cdot y_C = 3 \cdot 6$$

$$\boxed{P = 18}$$